# Exercícios complementares

## Cap.1 Equações diferenciais

1. Considere a equação diferencial

$$y' + y^2 = 0.$$

   a) Verifique se a equação tem soluções constantes, e em caso afirmativo, determine-as.

   b) Determine a solução $y(x)$ da equação que verifica a condição inicial $y(0) = \frac{1}{2}$.

2. Considere a equação diferencial

$$y' = 2(1+t)(1+y^2).$$

   a) Verifique se a equação tem soluções de equilíbrio (ou seja, soluções constantes).

   b) Determine a solução $y(t)$ da equação que verifica a condição inicial $y(0) = 1$.

3. Resolva o problema de valores iniciais

$$\begin{cases} y' - 2ty = e^{t^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

4. Considere a equação diferencial

$$y' = 2x\sqrt{1-4y^2}.$$

   a) Verifique se a equação tem soluções de equilíbrio (ou seja, soluções constantes), e em caso afirmativo, determine-as.

   b) Determine a solução $y(x)$ da equação que verifica a condição inicial $y(\frac{\sqrt{\pi}}{2}) = 0$.

5. Resolva o problema de valores iniciais

$$\begin{cases} xy' + 2y = e^x \\ \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

6. Determine a solução geral da equação $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{1}{x}$.

7. Considere a equação diferencial $xy' - y = y^2$.

   (a) Verifique se a equação admite soluções de equilíbrio (ou seja, soluções constantes), e em caso afirmativo determine-as.

   (b) Determine a solução $y(x)$ da equação que verifica a condição inicial $y(1) = -2$.

8. Resolva o problema de valores iniciais

$$\begin{cases} y' + 2xy = xe^{-x^2} \\ \\ y(1) = \frac{1}{e} \end{cases}$$

9. Considere a equação diferencial $x^3y' = y^2(x-4)$.

   (a) Verifique que a solução da equação que satisfaz a condição inicial $y(-1) = 0$ é constante, e diga se existem outras soluções constantes da equação.

   (b) Determine a solução $y(x)$ da equação que verifica a condição inicial $y(-1) = 1$.

10. Considere a equação diferencial $y' = 2x(1+2y)$.

    (a) Determine a solução $y_1(x)$ que verifica a condição inicial $y_1(-1) = -\dfrac{1}{2}$.

    (b) Determine a solução $y(x)$ que verifica a condição inicial $y(-1) = 0$.

# Cap.2 Espaços vectoriais reais

1. Considere a superfície definida por $x^2 - \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2} = 1$.

   a) Identifique as intersecções da superfície com os planos coordenados.

   b) Classifique a superfície.

   c) Justifique que se trata de uma superfície de revolução, e explique qual é a revolução (isto é, indique que curva roda em torno de que eixo).

   d) Escreva a equação da superfície que se obtém desta por reflexão no plano $x = y$.

2. Considere as superfícies $S_1$ e $S_2$ definidas respectivamente por
   $y = \frac{x^2}{2} + \frac{z^2}{2} \quad \text{e} \quad (y-4)^2 = x^2 + z^2.$

   a) Classifique as superfícies, descrevendo brevemente a sua posição e orientação (com um esboço, se preferir).

   b) Determine o conjunto intersecção das superfícies, e descreva-o geometricamente.

   c) Represente em coordenadas cilíndricas a superfície que se obtém de $S_1$ por reflexão no plano $z = y$.

3. Considere a superfície definida em $\mathbb{R}^3$ por $3x^2 - 3y^2 + z^2 = 1$.

   a) Determine as intersecções da superfície com os planos coordenados.

   b) Identifique a superfície.

   c) Diga, justificando, se se trata de uma superfície de revolução.

   d) Escreva a equação da superfície que se obtém por reflexão desta no plano $x = y$.

   e) Escreva a equação da superfície em coordenadas esféricas.

4. Considere as superfícies $S_1$ e $S_2$ definidas respectivamente pelas equações $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ e $x^2 + y^2 + z = \frac{9}{4}$.

   a) Identifique completamente as superfícies, indicando também se são de revolução.

   b) Determine e descreva geometricamente a intersecção das superfícies.

   c) Converta as equações das superfícies em coordenadas esféricas, apresentando o resultado na forma mais simplificada possível.

   d) Escreva as equações e descreva geometricamente as superfícies que se obtêm de

      (i) $S_1$ por reflexão no plano $xy$,

      (ii) $S_2$ por reflexão no plano $x = z$.

5. Considere a superfície $x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0$.

   (a) Classifique a superfície.

   (b) Justifique que se trata de uma superfície de revolução, e descreva essa revolução (isto é, indique que curva roda em torno de que eixo).

   (c) Escreva (na forma mais simplificada possível) a equação da superfície em coordenadas esféricas.

   (d) Escreva a equação da superfície que se obtém desta por reflexão no plano $y = z$.

# Cap.3 Funções vectoriais

1. Considere a curva em $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathbf{u}(t) = \left( \frac{2t}{1+t^2} \, , \, \frac{1-t^2}{1+t^2} \, , \, 1 \right) \, , \qquad t \in \mathbb{R}.$$

   a) Verifique que o vector tangente à curva é ortogonal a $\mathbf{u}(t), \ \forall t \in \mathbb{R}$.

   b) Identifique geometricamente a curva.
   *Sugestão: utilize as coordenadas cilíndricas $r$ e $z$ .*

2. Considere a curva em $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathbf{u}(t) = (2 \sin t \, , 4t \, , 2 \cos t) \, , \qquad t \in \mathbb{R}.$$

   a) Identifique a curva, descrevendo brevemente a sua posição (com um esboço, se preferir).

   b) Escreva a equação da recta tangente à curva no ponto $(1, \frac{2}{3}\pi, \sqrt{3})$.

3. Considere a curva em $\mathbb{R}^3$ definida parametricamente por $\mathbf{u}(t) = (t, t^2, t^3)$ .

   a) Determine a recta tangente à curva num ponto genérico.

   b) Determine os pontos da curva em que a recta tangente é paralela ao plano $x + 2y + z = 4$.

4. a) Determine a equação da recta tangente à curva definida por $\mathbf{u}\,(t) = \cos t\,\mathbf{i} + \sin t\,\mathbf{j} + \log(1+t)\,\mathbf{k}$ no ponto $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \log(1 + \frac{2\pi}{3})$.

   b) Verifique se existe algum ponto da curva em que a tangente seja perpendicular à curva.

5. Considere a curva em $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathbf{u}(t) = \big(2\cos^2(t)\ ,\ 2\sin(t)\cos(t)\ ,\ 2\sin(t)\big)\ , \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Determine a recta tangente e o plano normal à curva no ponto $(1, 1, \sqrt{2})$.

6. Descreva geometricamente a seguinte curva (pode fazer um esboço, se preferir):

$$x(t) = t\ ,\ y(t) = -t\ ,\ z(t) = \frac{t^2}{2}\ , \qquad t \in \mathbb{R}.$$

7. Considere a curva em $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathbf{r}(t) = (e^{-t}\cos t\ ,\ e^{-t}\sin t\ ,\ e^{-t})\ , \qquad t \geq 0.$$

a) Determine a recta tangente à curva no ponto $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{\pi}{6}}, \frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{6}}, e^{-\frac{\pi}{6}}\right)$.

b) Identifique geometricamente a curva (por um esboço, se preferir).

8. Considere a curva no plano definida por $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (1 + t^2)\mathbf{j}$.

(a) Determine os pontos da curva em que o vector posição $\mathbf{r}(t)$ e o vector tangente $\mathbf{r}'(t)$ (i) são perpendiculares; (ii) têm a mesma direcção e sentido; (iii) têm a mesma direcção e sentidos contrários.

(b) Esboce a curva $\mathbf{r}(t)$.

(c) Identifique a superfície obtida por rotação da curva $\mathbf{r}(t)$ em torno do eixo $y$, e escreva a sua equação em coordenadas esféricas.

9. Considere a curva em $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\mathbf{r}(t) = \big(e^t\ ,\ e^{-t}\ ,\ \log t\big)$$

(a) Determine o domínio $D$ de $\mathbf{r}$.

(b) Determine o vector tangente e a equação da recta tangente à curva no ponto $(e, \frac{1}{e}, 0)$.

(c) Determine a projecção da curva no plano $xy$ .

# Cap. 4 Funções de várias variáveis: cálculo diferencial

1. Considere a função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-4} + \log(x-y+1)$.
   (a) Determine o conjunto $D$ - domínio de $f$.
   (b) Determine o interior, a fronteira e o fecho de $D$.
   (c) Diga, justificando, se $D$ é aberto, fechado, ou nem aberto nem fechado.

2. Considere a função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = (\log(1-xy))^{-1}$.
   (a) Determine o conjunto $D$ - domínio de $f$.
   (b) Determine o interior, a fronteira e o fecho de $D$.
   (c) Diga, justificando, se $D$ é aberto, fechado, ou nem aberto nem fechado.

3. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & se \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 \;\; se \;\; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) Estude a continuidade de $f$ em $\mathbb{R}^2$.
   (b) Calcule as derivadas parciais de $f$ nos pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $(x,y) \neq (0,0)$.
   (c) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
   (d) Estude a diferenciabilidade de $f$ em $(0,0)$.

4. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} & se \;\; (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 \;\; se \;\; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Estude a continuidade de $f$ em $\mathbb{R}^2$.

(b) Calcule (caso existam) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(c) Estude a diferenciabilidade de $f$ em $(0,0)$.

5. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2 - xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Estude a continuidade de $f$ em $\mathbb{R}^2$.

(b) Calcule (caso existam) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(c) Estude a diferenciabilidade de $f$ em $(0,0)$.

6. Considere a função $f$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^{3/2} - xy}{x^{3/2} + y^3} \quad se \quad y \neq -\sqrt{x} \\ \\ 0 \quad se \quad y = -\sqrt{x} \end{cases}$$

(a) Determine o domínio de $f$.

(b) Estude a continuidade de $f$.

(c) Calcule (caso existam) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(d) Estude a diferenciabilidade de $f$ em $(0,0)$.

7. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Estude a continuidade de $f$ em $\mathbb{R}^2$ *(caso considere útil, poderá utilizar a curva* $y = 1 - e^x$*).*

(b) Calcule (caso existam) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(c) Estude a diferenciabilidade de $f$ em $(0,0)$.

8. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3\, y}{x^6+2y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Verifique que os limites direccionais de $f$ no ponto $(0,0)$ existem e são todos iguais, mas que $f$ não é contínua em $(0,0)$ *(caso considere útil, poderá utilizar a curva $y = x^3$)*. [1]

(b) Verifique, calculando-as, que existem as derivadas direccionais de $f$ no ponto $(0,0)$ segundo todas as direcções. [1]

(c) O que pode concluir sobre a diferenciabilidade de $f$ no ponto $(0,0)$? [1]

9. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2y+xy^2)\sin(x-y)}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

a) Estude a continuidade de $f$ em $\mathbb{R}^2$.

b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

c) Estude a diferenciabilidade de $f$ em $(0,0)$.

d) Sabendo que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y) = -\sin y \;\; \forall y \in \mathbb{R}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,0) = \sin x \;\; \forall x \in \mathbb{R}$, calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

e) O que pode concluir sobre a continuidade das funções $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ no ponto $(0,0)$? Justifique as respostas.

10. Seja $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $C^2$ (isto é, todas as derivadas parciais de $g$ de 1ª e 2ª ordem existem e são contínuas em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$). É possível ter-se $\dfrac{\partial g}{\partial x} = x + y$ e $\dfrac{\partial g}{\partial y} = y - x$? Justifique a resposta.

11. Seja $z = f(u, v)$ a função definida por $z = x^2 + 3xy + y^2$, em que $x = \sin u + \cos v,\ y = \sin u - \cos v$. Calcule $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ no ponto $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{3}\right)$.

12. Seja $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável, cujo gradiente é $\nabla f(u, v) = \left(\dfrac{v+1}{(u-1)(u+v)}, -\dfrac{1}{u+v}\right)$, e $w : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $\quad w(x, y) = f(x^2 - y,\ 2xy)$.
Calcule $\dfrac{\partial w}{\partial x}\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ e $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y\, \partial x}\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$.

13. Seja $w = f(u, v)$ uma função com derivadas de todas as ordens, para a qual se tem $\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}(3, 0) = -3,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(3, 0) = 3,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}(3, 0) = -1$. Sendo $u = y + e^{2x},\ v = xy$, calcule $\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}(0, 2)$.

14. Considere a função $w : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $w = f(u, v)$, em que $u = -xyz,\ v = 2xy + z^2$, e $f$ é uma função de classe $C^2$ em $\mathbb{R}^2$, para a qual se tem $\dfrac{\partial f}{\partial u}(-2, 2) = -3,\ \dfrac{\partial f}{\partial v}(-2, 2) = 1$,
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}(-2, 2) = 4,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}(-2, 2) = -1,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}(-2, 2) = \dfrac{1}{2}$.
Determine $\dfrac{\partial w}{\partial x}(1, -1, -2)$ *e* $\dfrac{\partial^2 w}{\partial z \partial x}(1, -1, -2)$.

15. Sejam $f$ e $\varphi$ funções diferenciáveis, e $z(x, y)$ a função definida por $z(x, y) = f(x + \varphi(y))$. Sabendo que $\varphi(1) = -1$, calcule $\dfrac{\partial z}{\partial x}(2, 1)$ e $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}(2, 1)$ em função das derivadas de $f$ num ponto apropriado.

16. Seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ (de variáveis $(u, v)$) uma função de classe $C^2$ em $\mathbb{R}^2$, e $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $f(x, y) = \varphi(x + y,\ xy)$. e $f$ é uma função de classe $C^2$ em $\mathbb{R}^2$.
   a) Calcule as derivadas parciais de segunda ordem da função $f$, e verifique que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1) - \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(2, 1)$. [1,5]

b) Sabendo adicionalmente que $-\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(2,1) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(2,1) = 1$ e que as derivadas parciais de segunda ordem de $\varphi$ são não negativas, mostre que o ponto $(1,1)$ é ponto de estacionaridade de $f$, e verifique se é um ponto séla, ou ponto de máximo ou de mínimo local.
*Observação: Caso não tenha resolvido a alínea a), admita que* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) \geq 0$ [1,5]

17. Considere a superfície definida por $e^{(z-x)y} + \sin(xyz^2) = \dfrac{1}{2}$, e o ponto $P_0\left(1, -\dfrac{\pi}{6}, 1\right)$ sobre a superfície.

a) Determine o plano tangente à superfície no ponto $P_0$.

b) Indique a direcção em que o declive da superfície no ponto $P_0$ é máximo.

18. Considere a superfície em $R^3$ definida pela equação

$$x^3 + 2xy^2 - 7z^3 + 3y = -1$$

a) Determine o plano tangente à superfície no ponto $(1,1,1)$.

b) Determine a derivada direccional da função $z(x,y)$ (função definida implicitamente pela equação) no ponto $(x,y) = (1,1)$ segundo a direcção do vector $\mathbf{u} = (-1, \sqrt{3})$.

c) Indique a direcção em que o declive da superfície é máximo a partir do ponto $(1,1)$.

19. a) Estude quanto a máximos relativos, mínimos relativos e pontos sela a função

$$f(x,y) = 4xy - 2x^2 - y^4$$

b) Calcule os pontos de máximo e mínimo (absolutos) da função $z = x^3 + y^3 - 3xy$ sobre a circunferência $x^2 + y^2 = 4$ .

20. Calcule o máximo e o mínimo (absolutos) da função $f(x,y) = -x^2 - y^2 + \dfrac{xy}{2} + 1$ no círculo $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

21. a) Estude quanto a máximos relativos, mínimos relativos e pontos sela a função
$f(x, y) = x^2 + y^3 - 6xy + 6y + 3x + 2.$

b) Determine os pontos mais próximo e mais afastado da origem da curva definida por $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$, e a partir do resultado obtido identifique a curva, caracterizando-a do modo mais completo possível (por meio de um esboço, se preferir).